

# Алгоритм Евклида

**Наибольший общий делитель (НОД)  
и наименьшее общее кратное (НОК)**

## Наибольший общий делитель (НОД)

Допустим у нас есть **два числа**, у этих двух чисел **есть число, на которое они оба делятся**.

Максимально большое такое число и есть наибольшим общим делителем.

То есть **наибольший общий делитель – наибольшее число, на которое можно разделить два числа** (или несколько чисел) без остатка.

Пример: для чисел 54 и 24 наибольший общий делитель равен 6.

## Наибольший общий делитель

Рассмотрим на примере чисел 48 и 36

*Выпишем все делители чисел 48 и 36:*

**48: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48**

**36: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36**

*Выделим общие делители чисел 48 и 36:*

**1; 2; 3; 4; 6; 12**

Наибольший общий делитель чисел 48 и 36 равен **12**

$$\text{НОД}(48;36) = 12$$

## Задание

1) Найти наибольший общий делитель чисел:



а) 36; 72; 198.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \end{array}$$

$$\text{НОД} ( 36; 72; 198 ) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

# Алгоритм Евклида

- Алгоритм Евклида — это способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух целых чисел. Оригинальная версия алгоритма, когда НОД находится вычитанием, была открыта Евклидом (III в. до н. э.).



Евклид  
(365-300 до н. э.)

## Алгоритм Евклида вычитанием

Для определения НОД двух целых чисел можно использовать **операцию вычитания**. Для этого потребуется следовать такому условию: если  $A=B$ , то НОД найден и он равен одному из чисел, иначе необходимо **большее из двух чисел заменить разностью его и меньшего**. **Например:**

**Пусть требуется найти НОД(108, 72):**

- 1)  $108 - 72 = 36$
- 2)  $72 - 36 = 36$
- 3)  $36 - 36 = 0$

**ОТВЕТ: НОД(108, 72) = 36**

# Пример применения алгоритма Евклида

Найдем НОД(44, 60):

1)  $60 - 44 = 16$

2)  $44 - 16 = 28$

3)  $28 - 16 = 12$

4)  $16 - 12 = 4$

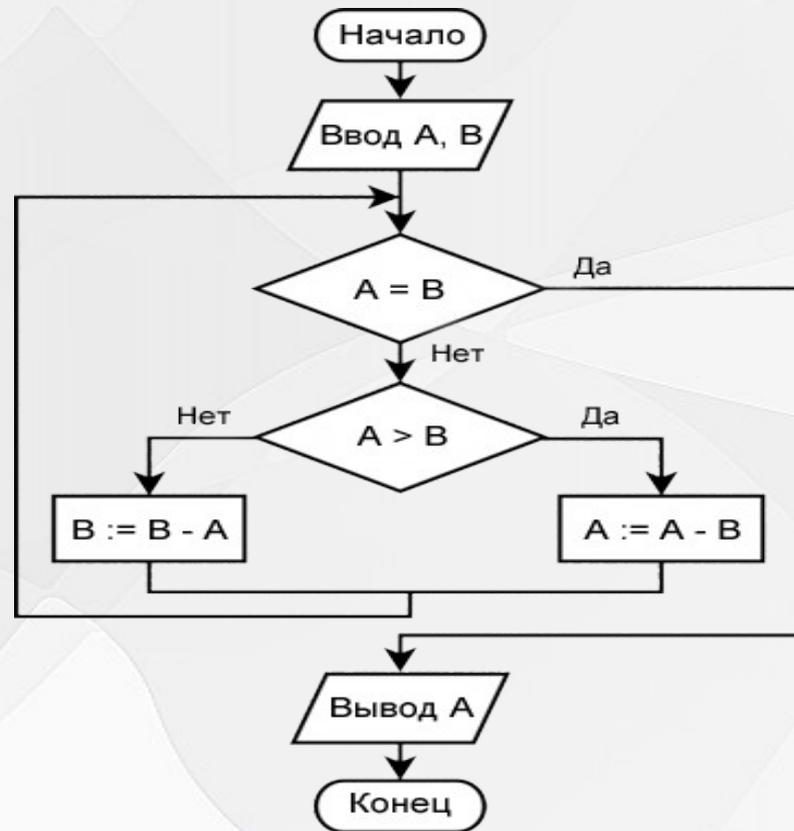
5)  $12 - 4 = 8$

6)  $8 - 4 = 4$

7)  $4 - 4 = 0$

**ОТВЕТ:** НОД(44, 60) = 4

# Блок-схема алгоритма Евклида



## Пример программы

```
program evklid;  
var a,b,nod:integer;  
begin  
  writeln('Vvedite 2 chisla');  
  readln(a,b);  
  while a<>b do  
    if a>b then a:=a-b else b:=b-a;  
  nod:=a;  
  writeln(nod);  
end.
```

# Задача 1

У нас есть **48 шоколадок**, и **36 конфет**. Мы хотим из этого набора составить некоторые комплекты, которые мы подарим детям на Новый Год. Какое **наибольшее количество комплектов** мы можем сделать так, чтобы всем детям досталось **поровну**?

## Решение

Чтобы поделить шоколадки и конфеты **поровну** нам нужно разделить и **шоколадки и конфеты нацело** на количество подарков. Например, если поделить их на два подарка, то в каждом подарке будет по 24 шоколадки, и 18 конфет. То есть **количество шоколадок или конфет нужно поделить на количество подарков**, и оно будет *делителем* количества шоколадок или конфет.

Давайте найдем наибольший общий делитель чисел 48 и 36.

Выпишем все делители для обоих чисел:48:

**1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48**

**36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36**

Давайте выделим из них общие делители:

**1, 2, 3, 4, 6, 12**

Наибольший из общих делителей – 12.

Значит, мы можем сделать 12 подарков, и не сложно посчитать, что в каждом из них будет по 4 шоколадки, и по 3 конфеты.

**Ответ: 12 комплектов.**

## Задача 2

Числа, у которых **наибольший общий делитель** равен 1, называются взаимно простыми. Например — 8 и 15, 5 и 11, 8 и 9 являются взаимно простыми, а 3 и 12, 15 и 20 не являются взаимно простыми.

Составьте программу, которая проверяет, являются ли 2 числа, которые вводятся с клавиатуры, взаимно простыми, если да, то выведите ответ «YES», если нет — ответ «NO»

## Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным натуральных чисел **a** и **b** называют **наименьшее натуральное число, которое кратно и a и b.**

Для любых натуральных чисел **a** и **b** справедливо равенство:

- $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = a \cdot b$
- $\text{НОК}(a,b) = a \cdot b / \text{НОД}(a,b)$

Найдите **наименьшее общее кратное** чисел:

б) 12 и 16;



12		2
6		2
3		3
1		

16		2
8		2
4		2
2		2
1		

$$12 = 2^2 \cdot \textcircled{3}$$

$$16 = \textcircled{2^4}$$

$$\text{б) НОК (12; 16) = } \textcircled{2^4} \cdot \textcircled{3} = 48;$$

**Найдите наименьшее общее кратное чисел:**

**а) 45 и 135; б) 34 и 170.**

**Равно ли оно одному из данных чисел?**

45	3	135	3
15	3	45	3
5	5	15	3
1		5	5
		1	

34	2
17	17
1	

170	2
85	5
17	17
1	

**Так как большее число делится на меньшее, то наименьшим общим кратным этих чисел будет являться большее число.**

**НОК (45; 135) = 135;**

**НОК (34; 170) = 170.**

**Наибольший общий делитель этих чисел:**

**НОД (45; 135) = 45;**

**НОД (34; 170) = 34.**

**Определение.**

Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел, называется **наименьшим общим кратным**.

**Обозначение: НОК (2; 3) = 6.**

**Алгоритм нахождения НОК:**

1. Разложить все числа на простые множители.
2. Написать разложение одного из чисел (лучше наибольшего).
3. Дополнить данное разложение теми множителями из разложения других чисел, которые не вошли в написанное разложение.

**Пример:**

Найдите наименьшее общее кратное чисел: 75 и 60.

75	5	60	2
15	5	30	2
3	3	15	3
1		3	3
		1	

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$$

10.05.2015

$$\text{НОК}(75; 60) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 75 \cdot 2 \cdot 2 = 300.$$

www.conspect.ru/kefu

MyShared

## Задачи

3. Составить программу для нахождения наименьшего общего кратного двух целых чисел —  $a$  и  $b$ , которые вводятся с клавиатуры.

4. Составьте программу для печати всех НОК (наименьших общих кратных) для всех натуральных чисел от 1 до  $N$ . Число  $N$  вводится с клавиатуры.

- **$\text{НОК}(a,b) = a \cdot b / \text{НОД}(a,b)$**

## Задача 5

В портовом городе начинаются два туристских теплоходных рейса, один из которых длится 12 суток, а второй — 15 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в тот же день снова отправятся в рейс. Сегодня из порта вышли два теплохода по этим маршрутам. Через сколько суток впервые они вновь вместе уйдут в плавание?

Решая задачу, приходим к выводу, что число суток, через которое они вновь вместе уйдут в плавание, должно делиться без остатка на 12 и на 15, т. е. должно быть кратным этим числам.

## Решение

Выпишем числа, кратные 12. Получим: 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132...

Выпишем числа, кратные 15. Получим: 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135...

Общими кратными чисел 12 и 15 будут числа: 60; 120...

Наименьшим из них является число 60, т. е. впервые теплоходы вновь вместе уйдут в плавание только через 60 суток.

Число 60 называют наименьшим общим кратным чисел 12 и 15.

- **Для решения этой задачи нужно найти наименьшее общее кратное чисел 12 и 15 или НОК(12,15).**
- **$\text{НОК}(a,b) = a \cdot b / \text{НОД}(a,b)$**

*В портовом городе начинаются три туристских теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй 20 суток и третий 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трем маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание?*

**Нужно найти НОК  
чисел 15; 20 и 12.**

$$15 = 3 \cdot 5;$$

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5;$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3;$$



**НОК (15; 20; 12) = 20 · 3 = 60,  
следовательно, через 60 суток.**

## Задачи

**6. Сократить дробь.** С клавиатуры вводятся числитель и знаменатель обыкновенной дроби. Сократить дробь и результат вывести на экран.

**7. Калькулятор.** С клавиатуры вводятся две обыкновенных дроби (их числители и знаменатели) и знак операции (+ сложение, - вычитание, \* умножение, / деление). Определить и вывести на экран вычисленный результат.

## Примечание

Для приведения дробей к общему знаменателю надо:

- найти наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей (наименьший общий знаменатель);
- разделить наименьший общий знаменатель на знаменатели данных дробей, т. е. найти для каждой дроби дополнительный множитель;
- умножить числитель и знаменатели каждой дроби на ее дополнительный множитель.

## Пример приведения дробей к общему знаменателю

Привести к общему знаменателю дроби:  $5/6$  и  $4/9$ .

$$\text{НОК}(6, 9) = 18$$

$18/6 = 3$  — дополнительный множитель первой дроби,

$18/9 = 2$  — дополнительный множитель второй дроби.

Тогда:

$$5/6 = 5 \cdot 3 / 6 \cdot 3 = 15/18$$

$$4/9 = 4 \cdot 2 / 9 \cdot 2 = 8/18$$