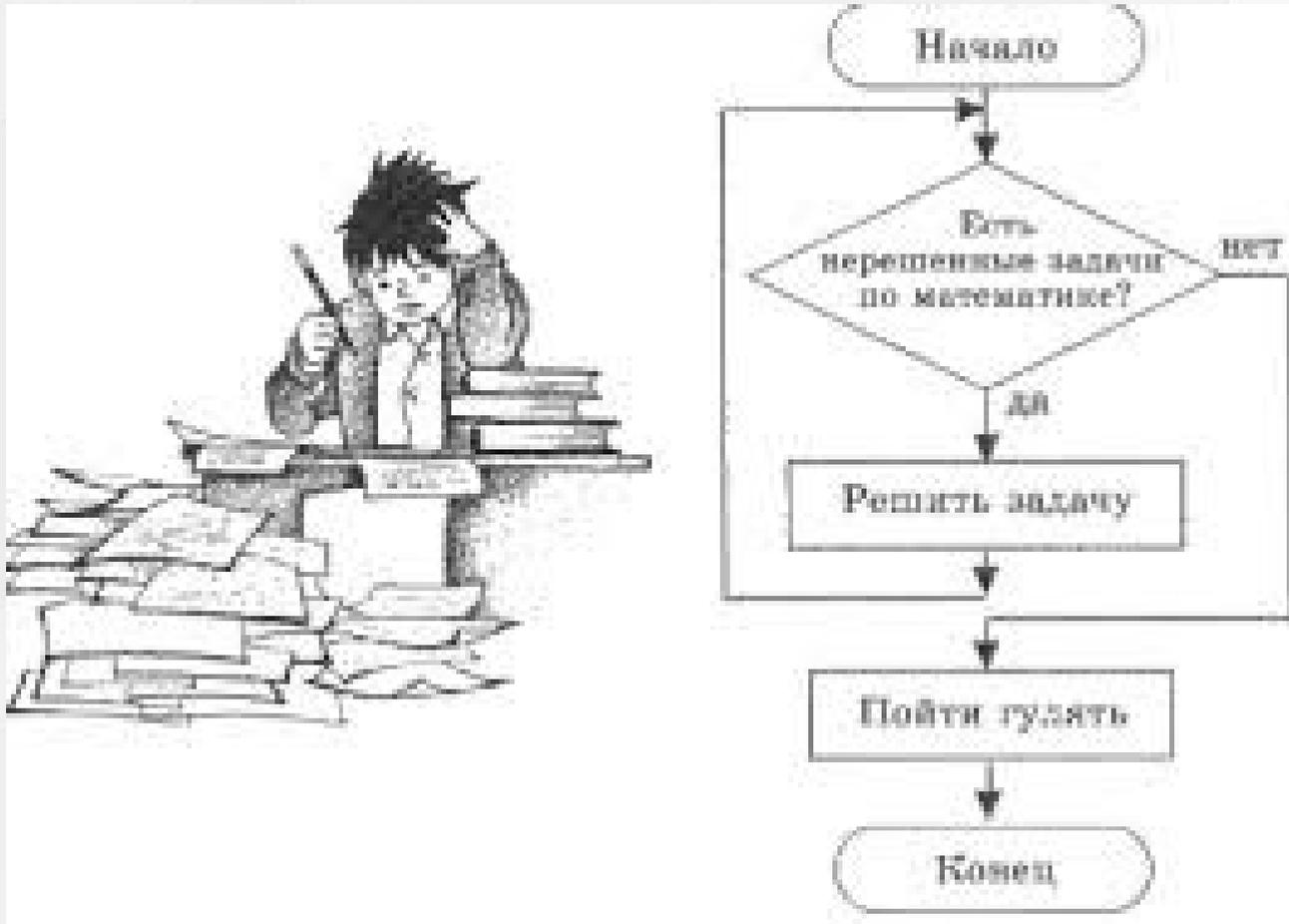


# Делители, кратные, НОД и НОК



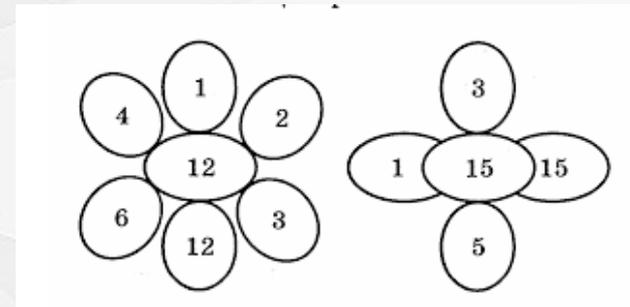
# Делители числа

Делителем **числа  $a$**  называется число, на которое **число  $a$**  делится без остатка.

Делителем числа **12** называется число, на которое **12** делится без остатка.

Попробуем перечислить эти числа:

1, 2, 3, 4, 6, 12



Все эти числа являются делителями числа 12, поскольку число 12 делится на них без остатка.

Делители числа 528:

<b>528</b>									
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>16</u>	<u>22</u>
<u>528</u>	<u>264</u>	<u>176</u>	<u>132</u>	<u>88</u>	<u>66</u>	<u>48</u>	<u>44</u>	<u>33</u>	<u>24</u>

# Кратные числа

**Кратным числа  $a$  называется число, которое делится без остатка на  $a$ .**

Данное определение содержит переменную  $a$ . Подставим вместо этой переменной любое число, например число 5 и прочитаем определение:

**Кратным числа 5 называется число, которое делится без остатка на 5.**

У любого числа бесконечно много кратных. Например, первыми кратными числа 5, являются числа 5, 10, 15, 20, 25.

Все они кратны 5, поскольку делятся на 5 без остатка:

$$5 : 5 = 1 \quad 10 : 5 = 2 \quad 15 : 5 = 3 \quad 20 : 5 = 4 \quad 25 : 5 = 5$$

# Чётные и нечётные числа

**Чётным** называется число, которое делится без остатка на 2.

Например, число 20 является чётным, поскольку оно делится без остатка на 2:

$$20 : 2 = 10$$

**Нечётным** называется число, если при его делении на 2, остаётся остаток 1. Например число 21 является нечётным, поскольку после его деления на 2 остаётся остаток 1:

$$21 : 2 = 10 \text{ (1 в остатке)}$$

Как распознать чётное число от нечётного, не выполняя деления на 2?

Очень просто. Из однозначных чисел **чётными** являются числа **0, 2, 4, 6, 8**, а **нечётными** являются **1, 3, 5, 7, 9**.

Если число оканчивается чётной цифрой, то это число является чётным. Если число оканчивается нечётной цифрой, то это число является нечётным.

# Как найти делители числа

## Описание алгоритма “Перебор делителей”

Перебор делителей заключается:

- в вычислении **остатка от деления** данного числа  $n$  на все целые числа от 2 до  $n$  (лучше –  $n \div 2$ );
- **если остаток от деления** на данное число **равен нулю**, то это число является делителем  $n$ .

# Задача 1

Составить программу для определения всех делителей числа  $N$ , которое вводится с клавиатуры. Делители числа вывести на экран в порядке возрастания.

- Найти и вывести на экран количество делителей числа и их сумму.
- Найти делители натуральных чисел в интервале от  $m$  до  $n$  ( $m < n$ ),  $m$  и  $n$  ввести с клавиатуры.
- Совершенное число́ — натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей, кроме самого себя. Найти все совершенные числа интервале от  $m$  до  $n$  ( $m < n$ ).

# Программа “Перебор делителей”

```
Var n, i, sum: integer;           //Описание переменных
Begin                               //Начало программы
writeln ('Введите число');        //Диалог с пользователем
readln(n);                          //Считывание числа
for i := 1 to n div 2 do           //Цикл от 1 до n/2
  if (n mod i) = 0 then begin      //Если число делится
    write(i, ' ');                 // на i, то выводим
  end;
writeln(n); //Вывод самого числа, оно тоже делитель
End.
```

# Наибольший общий делитель (НОД)

**Наибольшим общим делителем чисел  $a$  и  $b$  называется наибольшее число, на которое  $a$  и  $b$  делятся без остатка.**

Чтобы хорошо понять это определение, подставим вместо переменных  $a$  и  $b$  любые два числа.

Например, вместо переменной  $a$  подставим число 12, а вместо переменной  $b$  — число 9. Теперь попробуем прочитать это определение:

Наибольшим общим делителем чисел 12 и 9 называется наибольшее число, на которое 12 и 9 делятся без остатка.

# Наименьшее общее кратное (НОК)

Если какое-то число без остатка разделилось на другое, его называют кратным этого числа.

Оказывается, кратное может быть общим у нескольких чисел. И сейчас нас будет интересовать кратное двух чисел, причем оно должно быть максимально маленьким.

**Наименьшее общее кратное (НОК) чисел  $a$  и  $b$  — это наименьшее число, которое кратно  $a$  и  $b$ . Другими словами, это такое маленькое число, которое делится без остатка на число  $a$  и число  $b$ .**

Наименьшее общее кратное (НОК) чисел 9 и 12 — это наименьшее число, которое кратно 9 и 12. Другими словами, это такое маленькое число, которое делится без остатка на число 9 и на число 12.

Первые кратные для числа 9

$$\begin{aligned}9 \times 1 &= 9 \\9 \times 2 &= 18 \\9 \times 3 &= 27 \\9 \times 4 &= 36 \\9 \times 5 &= 45 \\9 \times 6 &= 54 \\9 \times 7 &= 63 \\9 \times 8 &= 72 \\9 \times 9 &= 81\end{aligned}$$

Первые кратные для числа 12

$$\begin{aligned}12 \times 1 &= 12 \\12 \times 2 &= 24 \\12 \times 3 &= 36 \\12 \times 4 &= 48 \\12 \times 5 &= 60 \\12 \times 6 &= 72 \\12 \times 7 &= 84 \\12 \times 8 &= 96 \\12 \times 9 &= 108 \\12 \times 10 &= 120 \\12 \times 11 &= 132 \\12 \times 12 &= 144\end{aligned}$$

Общими кратными для чисел 9 и 12 являются числа 36 и 72. Наименьшим же из них является 36.

Значит наименьшее общее кратное для чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка.

9 18 27 36 45 54 63 72 81



Кратные числа 9

12 24 36 48 60 72 84 96 108 120 132 144



Кратные числа 12

# Задачи с использованием НОД и НОК

*Задачи для определения НОД и НОК решены и проверены на прошлом занятии.*

**Задача 1.** Человек был два дня в пути. В первый день он прошёл 25км, а во второй 40км, при этом его скорость была одинаковой, и каждый день он проходил за время, выраженное натуральном числом. С какой скоростью шёл человек, если она была наибольшей из удовлетворяющих условию задачи.

**Решение:** для решения этой задачи достаточно найти НОД(25;40). Это и будет максимальная скорость человека.

$$\text{НОД}(25; 40) = 5 \text{ км/ч.}$$

**Ответ:** 5км/ч.

**Задача 2. Заместитель директора Вера Ивановна организует проведение дня здоровья.**

**424 человека повезут на стадион “Спартак” для проведения эстафет, а 477 человек – в плавательный бассейн с морской водой.**

**Для перевозки нужно заказать автобусы. Перевозчик имеет автобусы с одинаковым количеством мест, все места должны быть заняты. Сколько автобусов надо заказать и сколько пассажиров будет в каждом автобусе?**

**Решение  $\text{НОД}(424,477)=\text{НОД}(424;53)=53$**

**53 человека в автобусе,  
424:53=8 автобусов,  
477:53=9 автобусов  
Всего 17 автобусов.**

**Задача 3. Длина шага Бори 50 см, а его отца – 70 см. Боря утверждает, что первый раз, сделав целое количество шагов, они с папой окажутся на одинаковом расстоянии от начала пути через 3 метра, а папа не соглашается. Кто прав в этом споре?**

**Решение:**

**$\text{НОК}(50;70)= 350$  см. а не 3 метра**

**Прав папа.**

**Задача 4. Родители Артема – люди очень интересных профессий. Мама – стюардесса, а папа – машинист скорого поезда. Мама бывает дома один раз в четыре дня, а папа – один раз в семь дней. Так получилось, что оба они 1 января 2021 года уходят в рейс. Когда Артем увидит своих родителей дома вместе?**

**Решение:**

$$\text{НОК}(4;7)=28$$

**Семья будет дома вместе 28 января.**

**Задача 5. Два автобуса одновременно отправляются от одной площади по разным маршрутам. У одного рейс туда и обратно длится 48 минут, а у другого 1 час 12 минут. Через сколько времени автобусы снова встретятся на этой площади?**

**Решение : Найдем НОК(48;72).**

$$48=2*2*2*2*3, 72=2*2*2*3*3,$$

$$\text{НОК}(48;72)=2*2*2*2*3*3=144(\text{минуты}).$$

$$144 \text{ минуты} = 2 \text{ часа } 24 \text{ минуты}.$$

**Ответ: автобусы снова встретятся на этой площади через 2 часа 24 минуты.**